**共轭算子——定义**

假设是个有界线性算子。对每个，下式



给每个分配了一个数，从而它定义出上的一个泛函。显然是线性的，且也是有界的，因为：



由于是上的泛函，也就是说它可表示为的形式，即存在，使得对任意，，是唯一的。

这样，对每个的，对应了唯一的一个，从而定义出一种线性算子：



可以把这种关系记为：

或者记为，此式称为双线性恒等式。

这样定义出的即的共轭算子。

例子：令，采用通常的内积和范数定义。由Riesz表示定理，算子对应的双线性恒等式为：. 我们知道其实可表示为一个唯一的阶矩阵。可以证明，即。

定理：是上的线性有界算子，且

证明：见泛函相关教材

当涉及实际中的函数空间上的微分算子时，线性算子往往不是定义在整个空间上，而只是定义在某个线性子空间上。因此，需要给出如下定义：

给定赋范线性空间及某个子集，若对于任意元素，映射把它映射到上的唯一一个元素，则称为一个**定义域为****的算子**。如果满足以下两个条件，则称是线性的：(1)是的线性子空间 (2) , ;。

如果存在一个，使得，all，我们则称。但是在这里，的存在性不是自动满足的。事实上，只有当在中是稠密的时候，才一定存在这样的。此时，我们可以定义，。

**离散形式的共轭方法**

**1.1线化的目标函数**

在气动设计中，往往希望某个目标函数能最小化（或最大化）。比如升力可表示为网格点上离散的变量U的某个标量函数JU)，这里U是通过求解离散的欧拉方程得到的，J飞行器表面压力值的加权积分。

在设计优化中，人们感兴趣的是：在几何外形出现扰动后，J变动怎么样？如果u是流场中的扰动，那么线化的升力的扰动就是：



因此，目标就是计算，这里u满足恰当的线性流动方程。

**1.2对偶及共轭变量**

假设偏微分方程用算子形式表示为：。其中L表示某种线性微分算子（比如 或 等），f是已知的源项，u是未知变量，定义在某个域上。

经过数值方法离散后，转化为如下方程组：。其中是代表了算子L的矩阵，是代表解u的未知向量，是代表了源项f以及边界条件数据的向量。

所以：方程组：。计算目标是。

上述问题可转化为计算其对偶形式，其中的共轭解v满足以下线性方程组：。

这两种形式间的等价关系很容易证明：



这样做的好处是，当我们想要计算p个不同的f以及m个不同的g所对应的共p\*m个目标泛函的时候，有两种选择：要么先求解p个不同的原始方程，每个方程计算m次；要么先求解m个不同的对偶方程，每个方程计算p次。由于求解线性方程组花的时间往往比进行向量点乘的时间多，所以在时，采用对偶的方法更加高效。

**1.3物理解释**

引进共轭变量可以视为纯粹的数学构造，但它们实际上也存在物理意义。

一种看待共轭变量v的视角是：认为它表征了任意一个源项f对于目标泛函的影响。

|  |  |
| --- | --- |
| → |  |
| 源项 | 目标泛函的扰动 |

另外一种视角是：它们是对应于恰当的格林函数的目标泛函。

为了说明这点，我们定义向量满足除第i分量为1外其他项都为0。对应的解由方程给出，它是格林函数的离散等价形式，且有 。

因此，当解u等于第i个格林函数(, 即点源所产生的场)时，共轭变量v的第i个分量等于目标泛函的值。

**连续形式的共轭方法**

**2.1对偶及共轭偏微分方程**

pde中的对偶是线性方程中的对偶的自然推广。

在CFD中，偏微分方程往往以算子形式给出。在域上给定如下方程，u在边界上满足齐次边界条件：



假设我们想计算某个与解u有关的泛函。

则可转化为计算其对偶形式，其中的v是共轭偏微分方程在恰当的共轭齐次边界条件下的解。共轭算子是按如下等式定义的：



此等式对所有满足对应齐次边界条件的u, v都必须成立。注：共轭算子的定义原则是为了满足原问题泛函与对偶问题泛函的等价性。

给定了上述定义，则原问题与对偶问题间的等价性很容易证明：



**注：共轭算子的定义是基于齐次边界条件的，也就是说，在分部积分的等式中不考虑所有的边界积分项，其剩余的项构成等式，再用这种等式来定义共轭算子。这与泛函中线性算子与共轭算子的讨论必须基于希尔伯特空间的线性子空间是一致的。**

例如：考虑一维对流扩散方程：



则：



对照，则，且满足边界条件，从而上面的边界项就消掉了。

**2.2物理解释**

共轭变量的物理意义同样可理解为是格林函数对于目标内积的影响。

偏微分方程的解为：



其中是格林函数。因此目标泛函表示为：



其中，

因此，在某点处的共轭变量对应了同一点处使用了格林函数的泛函值。

**2.3边界项的处理**

到目前为止，我们都是假设原问题的边界条件是齐次的，且目标泛函只含整个域上的内积，而不含边界上的积分。更一般地，如果原问题的目标泛函包括边界积分的话，将导致共轭问题出现非齐次边界条件；如果原问题有非齐次边界条件，将导致共轭问题的目标泛函中出现边界项。

原问题： ，目标泛函：

对偶问题：，目标泛函：

等价性的证明应为：



若原问题虽是非齐次边界条件，但目标泛函不含边界积分，即，则需证明的等价关系为：



上面等式中的定义仍然是由分部积分后忽略掉所有边界积分得到的等式定义的。

**举个例子**：

原问题：，目标泛函：

则：



也就是说，的定义仍然是按之前那种不考虑边界积分项后的等式得到的。

若仍按照之前的想法，把定义为共轭方程，从而把转化为，则为了构造原问题目标泛函与对偶问题目标泛函间的等价关系，需要修改下对偶问题的目标泛函。因为从到间的等式构造，是无法避免边界积分项的（无论怎么定义对偶问题的边界条件，都不能消掉边界积分项）。

对偶问题：，目标泛函

但由于现在原问题的边界条件是非齐次的，则多出来的是无论如何都无法消掉的（无论怎么定义对偶问题的边界条件），所以现在：



，即把分部积分多出来的边界项看做原问题边界上的积分

换言之，是先假设存在这种等价关系，才定义出所谓的对偶算子。这里的关键点是根据等式：定义出共轭算子和

共轭等式的一般形式则为：

